翁志文教授 / 應用數學系

距離正則圖、群試設計、代數示表與表示理論、組合矩陣理論、圖論

- Yu-pei Huang, Yeh-jong Pan and Chih-wen Weng, Nonexistence of a Class of Distance-Regular Graphs, the electronic journal of combinatorics, Volume 22, Issue 2 (2015), #P2.37

  (證明一類距離正則圖不存在)

- Jun Guo, Kaishun Wang, Chih-wen Weng, Pooling semilattices and non-adaptive pooling designs, Discrete Mathematics 320(2014), 64-72

  (在半格中建構群試設計)

- Chia-an Liu, Chih-wen Weng, Spectral radius of bipartite graphs, Linear Algebra and its Applications, 474(2015), 30–43

  (給二部圖一個緊緻的圖譜上界)

- Yen-Jen Cheng, Feng-lei Fan, Chih-wen Weng, An extending result on spectral radius of bipartite graphs, arXiv:1509.07586

  (給孿生質數一個圖譜刻畫)

http://jupiter.math.nctu.edu.tw/~weng/weng.htm

假設一點數為 n 的圖 G 有鄰接矩陣 A 及其特徵值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 和點著色數 $\chi(G)$。Wilf(1967), Hoffman(1970) 分別證明底下 $\chi(G)$ 的上界及下界：

$$\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n} \leq \chi(G) \leq \lambda_1 + 1. \tag{1}$$

這兩個界是最佳的，因為當 G 是完全圖 K_n 時，這兩個界都能達到。這類結果因結合圖論與線性代數兩個數學上看起來無關的領域卻產生關聯，而有數學學理上的趣味。其實它的應用更是普遍！

雖然圖 G 的點著色數 $\chi(G)$ 是一整數，即使藉由電腦的幫助，去估計 $\chi(G)$ 仍是一個難題，它是 NP-complete 問題。底下式子告訴我們即使 λ_1 及 λ_n 可能為無理數，但其卻可用底下最佳化式子去逼近：

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x}:\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1} \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \qquad \lambda_n = \min_{\mathbf{x}:\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1} \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

值得一提，應用 (1) 估計 $\chi(G)$ 時，我們只要知道 $\lambda_1 + 1$ 及 $\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n}$ 的整數部分就夠了。

(1) 不只告訴我們 $\chi(G)$ 的上下界，他也告訴我們特徵值 λ_1 的下界。λ_1 被稱為質譜半徑 (spectrum radius)，能用組合性質去估計它也是有趣且有用的，如著名的 Perron-Frobenius 定理宣稱直譜半徑不會超過圖的最大度數 (degree)。谷歌網頁評價 (Google page rank) 進一步利用到直譜半徑 λ_1 的特徵向量。